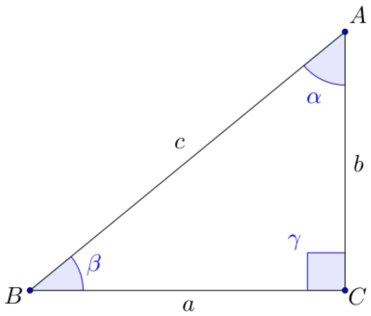
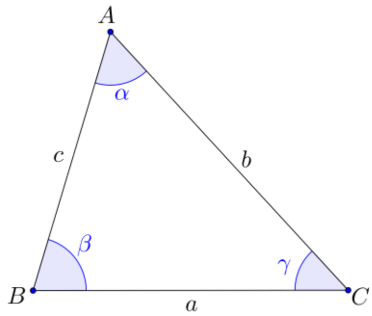
1 Théorème du sinus et du cosinus

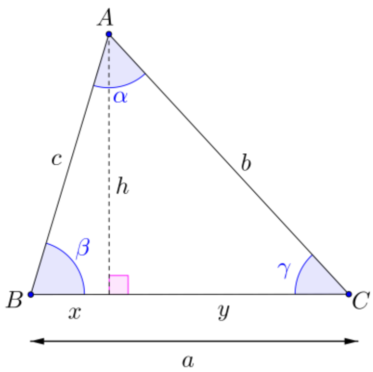
1) Triangle quelconque

Certains théorème ne s'appliquent qu'aux triangles rectangles. D'autres s'appliquent à tous les triangles :

Triangle rectangle	Triangle quelconque
	
Pythagore : $a^2 + b^2 \; = \; c^2$	Cosinus : $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \; = \; c^2$
Euclide : $b^2 \; = \; b'c$	Sinus : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
Hauteur : $h^2 \; = \; a'b'$	

2) Théorème du cosinus

Dessinons la hauteur d'un triangle quelconque :



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :

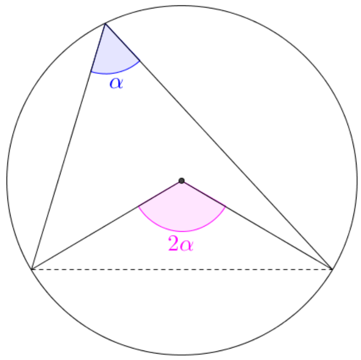
$$
\begin{aligned}
c^2 &= x^2 + h^2 \\
&= (a-y)^2 + h^2 \\
&= a^2 - 2ay + \underbrace{y^2 + h^2}_{b^2} \\
&= a^2 + b^2 - 2ay
\end{aligned}
$$

D'où le théorème du cosinus :

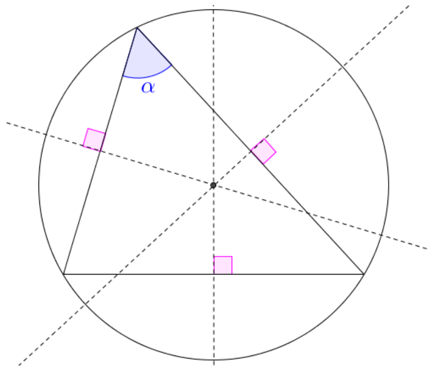
$$\boxed{c^2 \; = \; a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

3) Théorème du sinus

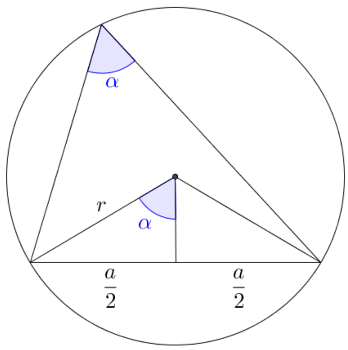
Dans un cercle, l'angle au centre vaut le double de l'angle inscrit interceptant la même corde :



Tout triangle peut être inscrit dans un cercle dont le centre est le point d'intersection des médiatrices :



Ce qui précède permet d'obtenir une relation entre le sinus d'un angle et le demi-côté opposé :



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{2r}}$$

Cette relation s'applique aux autres côtés :

$$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{2r} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2r}}$$

D'où le théorème du sinus, où r est le rayon du cercle circonscrit :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

4) Aire d'un triangle quelconque

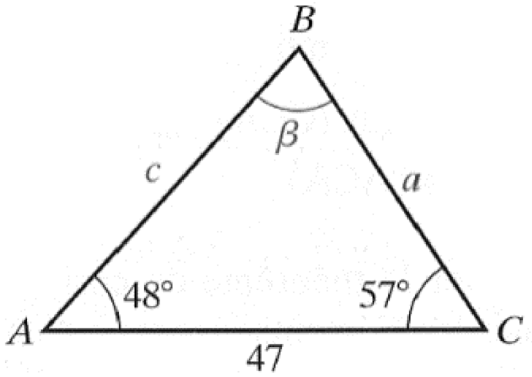
Les relations précédentes permettent de calculer l'aire d'un triangle quelconque :

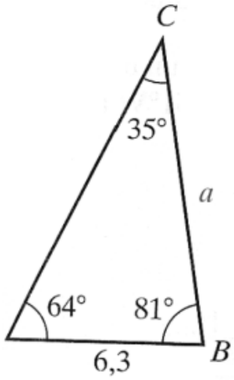
$$\boxed{S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

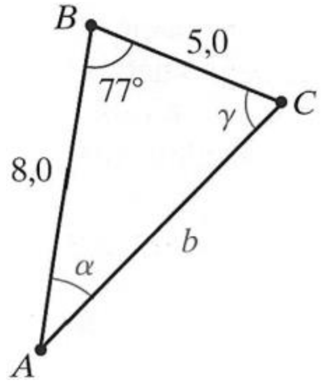
5) Exercices

Exercice 1

Pour chacun des triangles ci-dessous, calculez les côtés et les angles manquants :







Exercice 2

Donnez la longueur des côtés et la valeur des angles des triangles suivants :

a) $a = 70{,}24$ $b = 82{,}12$ $\gamma = 30{,}69°$

b) $a = 85{,}80$ $c = 57{,}29$ $\beta = 117{,}81°$

c) $a = 85{,}67$ $\beta = 123{,}18°$ $\gamma = 24{,}54°$

Exercice 3

Un triangle ABC possède une aire de $12{,}52$, deux angles $\alpha = 54{,}08°$ et $\beta = 88{,}94°$. Que valent ses côtés ?

Exercice 4

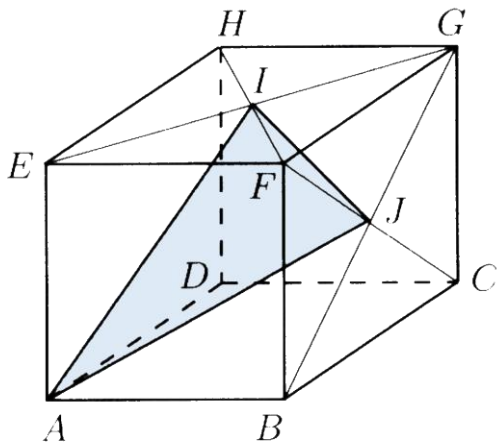
Un parallélogramme $ABCD$ possède un côté $AB = 30$, un côté $BC = 20$ et un angle $\beta = 60°$ en B.

a) Que valent ses diagonales AC et BD ?

b) Que vaut l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles ?

Exercice 5

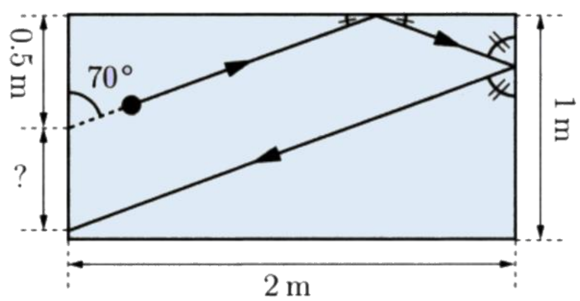
Sur le cube illustré ci-contre, le point I se trouve au centre de la face $EFGH$ et le point J se trouve au centre de la face $BCGF$. Calculez les angles du triangle AIJ.



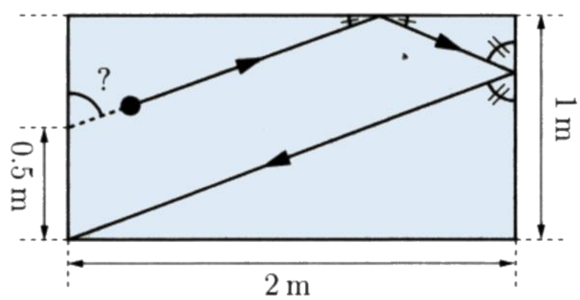
Exercice 6

On lance une boule de billard selon le schéma ci-dessous :

a) Où revient la boule ?

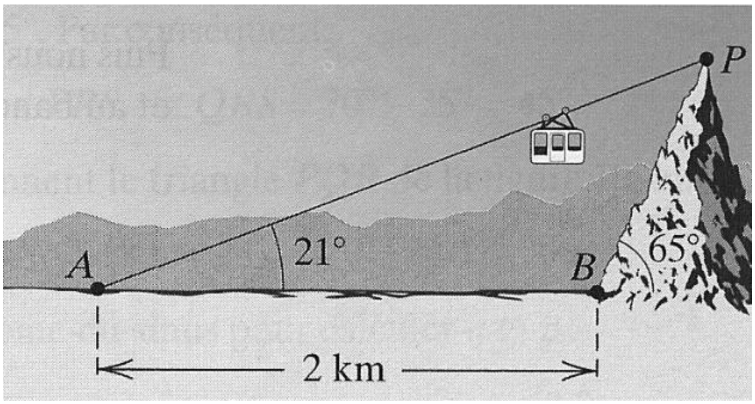


b) Quel est l'angle de départ ?



Exercice 7

Un téléphérique transporte des passagers du point A, qui se trouve à 2 km du point B situé au pied de la montagne, à un point P, au sommet de la montagne. Les angles d'élévation sont $\alpha = 21°$ et $\beta = 65°$, comme le montre le schéma ci-contre.



a) Que vaut la distance AP ?

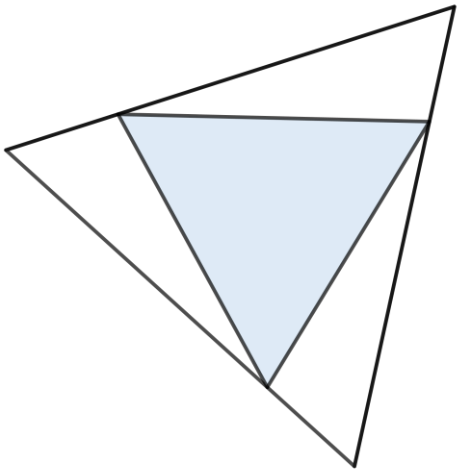
b) Que vaut la hauteur de la montagne ?

Exercice 8

Un observateur voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la terre et que le rayon terrestre vaut 6370 km, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur ?

Exercice 9

On considère un triangle équilatéral de côté 1. On divise chaque côté un quatre parties égales afin de construire le triangle bleu illustré ci-contre :



a) Que valent les côtés du triangle bleu ?

b) Que vaut l'aire du triangle bleu ?

c) Que vaut le rayon du cercle circonscrit au triangle bleu ?

Exercice 10 (bonus)

Calculez la distance TL entre la terre et la lune connaissant le rayon terrestre R, la latitude θ entre deux points A et B et leurs angles d'élévation respectifs α et β, comme le montre le schéma ci-dessous :